離散型最大原理の微分幾何学的側面(制御とシステムの数理)

前田, 茂

数理解析研究所講究録
485巻 1983年 201-213

離散型最大原理の微分幾何学的側面

京大工学部　前田　茂 (Shigeru Maeda)

Pontryaginの最大原理によれば Hamiltonの正準方程式で表わされる制御系が現れる。差分方程式で記述される離散型制御系でも Katz によって最大原理が提示され Fan, Wang 達によって拡張されたが、連続系の場合と同様に正準方程式によく似た差分方程式で記述される制御系が現れる。[1,2]　本報告の目的は　1) Katzの離散型最大原理を陽的・陰的両方の差分方程式を含む状態方程式で記述される制御系に拡張し、2) 最大原理で現れる制御系の構造を Hamilton力学の立場から調べる、ことである。

§1. 準備

差分方程式の世界でも Hamilton, Lagrange の両形式を備えた古典力学の枠組が作られている[3,4]。後で、最大原理

で現れる制御系をHamilton力学の立場から考察するために、いわゆる正準構造をもった差分方程式について復習する．

1.1. 差分方程式の保存量と対称性作用素

N次元Euclid空間（一般になめらかな多様体）M上の離散系とは　Mの（局所）座標系$(x^1, \cdots, x^N)$によって差分方程式

$$\phi^i(x_\tau, x_{\tau+1}) = 0 \;,\; |\partial\phi^i/\partial x^j_{\tau+1}| \neq 0 \quad \begin{pmatrix} i,j=1,\cdots,N \\ \tau=0,1,\cdots \end{pmatrix} \tag{1}$$

で表わされる系をいう．　但し、ϕ^iはM×M上のなめらかな実関数とする．　(1)は写像Φ: $x_\tau = (x^1_\tau, \cdots, x^N_\tau) \in M \mapsto x_{\tau+1} = (x^1_{\tau+1}, \cdots, x^N_{\tau+1}) \in M$を与える．　次の定義を行おう．

(i) $x_{\tau+1} = \Phi(x_\tau)$ $(\tau=0,1,\cdots)$によって定まるM上の半無限点列$\{x_\tau\}_{\tau\geq 0}$を(1)の解という．

(ii) M上のなめらかな実関数fが(1)の任意の解$\{x_\tau\}$に沿って一定値をとる、i.e. $f(x_\tau) = f(x_{\tau+1})$、とき　fを(1)の保存量といい　(1)の保存量の全体をI_Φとかく．

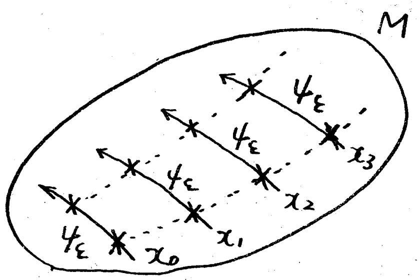
また　M上のなめらかなベクトル場

$$X = \sum_{i=1}^{N} \xi^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i} \tag{2}$$

の生成するフロー*) をψ_εとする．

*) 局所的には　$dx^i/d\varepsilon = \xi^i(x)$, $x|_{\varepsilon=0} = x_0$ の解を$x^i(\varepsilon) = A^i(x_0, \varepsilon)$とするとき　ψ_ε: $x_0 \mapsto x(\varepsilon)$.

(iii) (1)の任意の解 $\{x_\tau\}$ 及び任意に小さい ε に対して $\{\psi_\varepsilon(x_\tau)\}_{\tau=0,1,\cdots}$ が (1)の解になるとき X を(1)の対称性作用素といい (1)の対称性作用素の全体を S_Φ とかく.



(2)が(1)の対称性作用素であるための必要十分条件が[3]に与えられている.

<u>Lemma 1.</u> (2)が(1)の対称性作用素であるための必要十分条件は $\phi^i(x_\tau, x_{\tau+1})=0$ $(i=1,\cdots,N)$ が成立しているときすべての $j=1,\cdots,N$ について次式が成立すること.

$$\sum_{i=1}^{N}\left\{ \xi^i(x_\tau)\frac{\partial\phi^j}{\partial x_\tau^i}(x_\tau, x_{\tau+1}) + \xi^i(x_{\tau+1})\frac{\partial\phi^j}{\partial x_{\tau+1}^i}(x_\tau, x_{\tau+1}) \right\}=0.$$

∎

<u>cf.</u> 保存量 f があれば解は"超曲面" $f=\mathrm{const.}$ 上に拘束される. こういう性質を利用して保存量から Lyapunov 関数を構成することがある.

<u>cf.</u> 対称性作用素の例を線形方程式であらわされる簡単な離散系についてみてみよう.

$$x_{\tau+1}^1 = a x_\tau^1 + b x_\tau^2,\quad x_{\tau+1}^2 = c x_\tau^1 + d x_\tau^2 \tag{3}$$

(3)は対称性作用素 $X = x^1\cdot\partial/\partial x^1 + x^2\cdot\partial/\partial x^2$ を許容する.

X の生成するフローは $\psi_\varepsilon : (x^1, x^2) \mapsto (e^\varepsilon x^1, e^\varepsilon x^2)$.

(3)の一般解は容易に求められるけれども、若し(3)の

1つの解 $\{x_\tau^1, x_\tau^2\}$ の挙動がよく分っているものとすると $\bar{x}_0^1 = e^\varepsilon x_\tau^1$, $\bar{x}_0^2 = e^\varepsilon x_\tau^2$ を初期値とする(3)の解の挙動は $\{x_\tau^1, x_\tau^2\}$ のそれから ψ_ε を介して把握できる．しかもこのことは対象の方程式が線形でなくても可能である．

cf. S_Φ は Lie 代数をなす． (1)がパラメータを含みパラメータの値の違いで Lyapunov の意味で安定から不安定に変わる分岐現象が起こるとき Lie 代数の構造が変わる例が知られている [5]．

1.2. 正準構造をもつ離散系

連続系（常微分方程式系）において保存量と対称性作用素とは一般に関連するとは限らないが Hamilton 力学系では両者は密接に関係する． その離散版が正準構造をもつ離散系として[3]で求められている．

$2n$ 次元 Euclid 空間（一般に symplectic 多様体）M 上の（局所）座標系（$q^1, \cdots, q^n, p_1, \cdots, p_n$）によって表わされる次の離散系を考える．

$$q^i_{\tau+1} - q^i_\tau = \frac{\partial H}{\partial p_i}(q_\tau, p_{\tau+1}), \quad p_{i,\tau+1} - p_{i\tau} = -\frac{\partial H}{\partial q^i}(q_\tau, p_{\tau+1}). \tag{4}$$

この離散系は次の性質をもつ．

(i) 2形式 $dp_i \wedge dq^i$ を保存する, i.e. $dp_{i,\tau+1} \wedge dq^i_{\tau+1} = dp_{i\tau} \wedge dq^i_\tau$.

(ii) $f, g \in I_\Phi \Rightarrow \{f, g\} = \sum_{i=1}^{n} (\partial f/\partial q^i \cdot \partial g/\partial p_i - \partial f/\partial p_i \cdot \partial g/\partial q^i) \in I_\Phi$.

(iii) $f \in I_\Phi \Rightarrow X_f = \sum_{i=1}^{n} (\partial f/\partial p_i \cdot \partial/\partial q^i - \partial f/\partial q^i \cdot \partial/\partial p_i) \in S_\Phi$.

(ii) の $\{,\}$ は Poisson 括弧であり、双1次・歪対称・Jacobi 恒等式の3性質を満たす。 (4)で定まる写像 $(q_\tau, p_\tau) \mapsto (q_{\tau+1}, p_{\tau+1})$ を Φ であらわしている訳だが、(ii), (iii) は次のように換言される。

(ii)′ I_Φ は $\{,\}$ に関して Lie 代数をなす。

(iii)′ $\sigma : f \in I_\Phi \mapsto -X_f \in S_\Phi$ は代数準同型である。

(4) は性質 (i), (ii), (iii) をもつがゆえに正準方程式の離散版とみなせる。 この種の差分方程式がどの程度各分野に現れているかは未知であるが、最大原理で現れる制御系が具体例でありしかも幾何的に面白い性質をもつことは興味深い。

cf 正準構造をもつとは性質(i)の成立することと同値である。 正準構造をもつ離散系は(4)以外に幾つもの差分方程式で記述できる。

§2. Katz の離散型最大原理の1つの拡張

本節では陽的・陰的両方の差分方程式で記述される制御系に対して最大原理を構成する。 考える制御系は次式で与えられるものとする。

$$\begin{cases} q^i_\tau = f^i(q_{\tau-1}, p_\tau, \theta_\tau), & p_{\alpha,\tau-1} = g_\alpha(q_{\tau-1}, p_\tau, \theta_\tau), \\ q^i_0 = a^i, \quad p_{\alpha 0} = b_\alpha, & \tau = 1, \cdots, f. \end{cases} \tag{5}$$

$$J \equiv \sum_{i=1}^{n} c_i q^i_f + \sum_{\alpha=1}^{m} d^\alpha p_{\alpha f} \longrightarrow \min. \tag{6}$$

ここで、$q_\tau = (q^1_\tau, \cdots, q^n_\tau)$ 及び $p_\tau = (p_{1\tau}, \cdots, p_{m\tau})$ は状態変数．θ_τ は R^u の適当なコンパクト集合に値をとる制御変数である。f^i, g_α はなめらかな実関数、n 及び m は任意の非負整数とする（0であっても構わない）。 $m=0$ のときが Katz の場合である． 次の定理が成立する [6]。

<u>Th. 1.</u> 制御系(5)が(6)をみたす最適解をもつものとする．このとき 補助変数 $\phi = (\phi_1, \cdots, \phi_n)$, $\psi = (\psi^1, \cdots, \psi^m)$ を導入して関数

$$H_\tau = \sum_{i=1}^{n} \phi_{i\tau} f^i(q_{\tau-1}, p_\tau, \theta_\tau) - \sum_{\alpha=1}^{m} \psi^\alpha_{\tau-1} g_\alpha(q_{\tau-1}, p_\tau, \theta_\tau) \tag{7}$$

を定義し 次の制御系を考える．

$$\begin{cases} q^i_\tau = \dfrac{\partial H_\tau}{\partial \phi_i}, \quad p_{\alpha,\tau-1} = -\dfrac{\partial H_\tau}{\partial \psi^\alpha}, \quad \phi_{i,\tau-1} = \dfrac{\partial H_\tau}{\partial q^i}, \quad \psi^\alpha_\tau = -\dfrac{\partial H_\tau}{\partial p_\alpha}, \\ q^i_0 = a^i, \quad p_{\alpha 0} = b_\alpha, \quad \phi_{if} = c_i, \quad \psi^\alpha_f = d^\alpha. \end{cases} \tag{8}$$

このとき 各 τ において最適制御に対して H_τ は最小値をとらなければならない．∎

証明の概略を述べる．

$\{\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2, \cdots, \bar{\theta}_f\}$ を最適制御とし，対応する最適解を $\{(\bar{q}_0, \bar{p}_0), (\bar{q}_1, \bar{p}_1), \cdots, (\bar{q}_f, \bar{p}_f)\}$ とする． 更に $\tau = t$ において最適制御に微小な摂動の加わった新しい制御 $\{\bar{\theta}_1, \cdots, \bar{\theta}_{t-1}, \theta_t = \bar{\theta}_t + \varepsilon\eta, \bar{\theta}_{t+1}, \cdots, \bar{\theta}_f\}$ を考え，対応する(5)の解を $\{(\bar{q}_0, \bar{p}_0), \cdots, (\bar{q}_{t-1}, \bar{p}_{t-1}), (q_t, p_t), \cdots, (q_f, p_f)\}$ とする． ε は微小パラメータである． f^i, p_α がなめらかだから 2 つの解の間で

$$q^i_\tau = \bar{q}^i_\tau + \varepsilon \xi^i_\tau + o(\varepsilon), \quad p_{\alpha\tau} = \bar{p}_{\alpha\tau} + \varepsilon \eta_{\alpha\tau} + o(\varepsilon) \tag{9}$$

とおける． 若干の計算の後 ξ_τ, η_τ は次の差分方程式をみたすことがわかる．

$$\begin{cases} \xi^i_\tau = \sum_{j=1}^{n} \dfrac{\partial f^i}{\partial q^j}(\bar{q}_{\tau-1}, \bar{p}_\tau, \bar{\theta}_\tau)\, \xi^j_{\tau-1} + \sum_{\alpha=1}^{m} \dfrac{\partial f^i}{\partial p_\alpha}(\bar{q}_{\tau-1}, \bar{p}_\tau, \bar{\theta}_\tau)\, \eta_{\alpha\tau}, \\ \eta_{\alpha,\tau-1} = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial g_\alpha}{\partial q^i}(\bar{q}_{\tau-1}, \bar{p}_\tau, \bar{\theta}_\tau)\, \xi^j_{\tau-1} + \sum_{\beta=1}^{m} \dfrac{\partial g_\alpha}{\partial p_\beta}(\bar{q}_{\tau-1}, \bar{p}_\tau, \bar{\theta}_\tau)\, \eta_{\beta\tau}. \end{cases} \tag{10}$$

次に 補助変数 $\phi_\tau = (\phi_{1\tau}, \cdots, \phi_{n\tau})$ 及び $\psi_\tau = (\psi^1_\tau, \cdots, \psi^m_\tau)$ を導入して双1次式

$$\sum_{i=1}^{n} \phi_{i\tau} \xi^i_\tau + \sum_{\alpha=1}^{m} \psi^\alpha_\tau \eta_{\alpha\tau} \tag{11}$$

が $\tau = t, t+1, \cdots, f$ において一定値をとるようにする． それためには ϕ_τ, ψ_τ が次の差分方程式をみたせばよい．

$$
\left\{
\begin{aligned}
\phi_{i,\tau-1} &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f^j}{\partial q^i}(\bar{q}_{\tau-1}, \bar{p}_\tau, \bar{\theta}_\tau)\,\phi_{j\tau} - \sum_{\alpha=1}^{m} \frac{\partial g_\alpha}{\partial q^i}(q_{\tau-1}, p_\tau, \theta_\tau)\,\psi^{\alpha}_{\tau-1}, \\
\psi^{\alpha}_{\tau} &= -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f^i}{\partial p_\alpha}(q_{\tau-1}, p_\tau, \theta_\tau)\,\phi_{i\tau} + \sum_{\beta=1}^{m} \frac{\partial g_\beta}{\partial p_\alpha}(q_{\tau-1}, p_\tau, \theta_\tau)\,\psi^{\beta}_{\tau-1}.
\end{aligned}
\right. \tag{12}
$$

ϕ_τ, ψ_τ が終端条件として $\phi_{if} = c_i$, $\psi^\alpha_f = d^\alpha$ をみたすことを要請すれば 前述の2つの解に対する J の値の差 δJ は

$$\delta J = \sum_i c_i \xi^i_f + \sum_\alpha d^\alpha \eta_{\alpha f} = \sum_i \phi_{it} \xi^i_t + \sum_\alpha \psi^\alpha_t \eta_{\alpha t}$$

となる. 最後の式は若干の計算で $H_t(\theta_t) - H_t(\bar{\theta}_t) + o(\varepsilon)$ に等しいことがわかる. $\delta J \geqq 0$ であることから結論を得る. (5), (12) をまとめたものが (8) である.

cf. 最大原理を具体的に適用する際には Halkin の指摘した点に留意する必要がある [7].

§3. 微分幾何学的側面

Hamilton の正準方程式といえば力学的現象の記述という面で余りにも普遍的であるが、差分方程式の世界でその離散版がよく使われるかどうかについては未知の点が多い. このような観点から実用的な離散型最大原理で現れる制御系が離散的な *Hamilton* 系（正準構造をもつ差分方程式）の1例を与えることは興味深い. 本節では (8)（並びに (5)）で与え

られる離散系を対称性論的（或いは微分幾何学的）視点から調べる．

最大原理に関連して現れた差分方程式(5), (8)を再記する．θ_τはパラメータとみなして省略しておく．

$$(A)\qquad q^i_\tau = f^i(q_{\tau-1},\ p_\tau),\quad p_{\alpha,\tau-1} = g_\alpha(q_{\tau-1},\ p_\tau).$$

$$(B)\qquad \begin{cases} q^i_\tau = \dfrac{\partial H_\tau}{\partial \phi_i},\quad p_{\alpha,\tau-1} = -\dfrac{\partial H_\tau}{\partial \psi^\alpha},\quad \phi_{i,\tau-1} = \dfrac{\partial H_\tau}{\partial q^i},\quad \psi^\alpha_\tau = -\dfrac{\partial H_\tau}{\partial p_\alpha}, \\ H_\tau = \sum_{i=1}^{n} \phi_{i\tau}\, f^i(q_{\tau-1},\ p_\tau) - \sum_{\alpha=1}^{m} \psi^\alpha_{\tau-1}\, g_\alpha(q_{\tau-1},\ p_\tau). \end{cases}$$

以下，上のそれぞれをA系，B系と略称する． B系が正準構造をもつことは次のようにして示される．

<u>Th.2.</u> B系の任意の解に沿って1-形式 $\nu \equiv \sum_{i=1}^{n} \phi_i\, dq^i + \sum_{\alpha=1}^{m} \psi^\alpha dp_\alpha$，従って 2-形式 $d\nu \equiv \sum_{i=1}^{n} d\phi_i \wedge dq^i + \sum_{\alpha=1}^{m} d\psi^\alpha \wedge dp_\alpha$ が保存される，つまり，$\nu_{\tau+1} = \nu_\tau$ 及び $d\nu_{\tau+1} = d\nu_\tau$. ∎

§1の1.2によれば B系は (q^i, p_α) と (ϕ_i, ψ^α) とを互いに共役な"正準"変数とする正準構造をもつ． 更に 次のことがわかる．

q, p, ϕ, ψ のなめらかな関数 h に対して無限小作用素

$$\sigma(h) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial h}{\partial q^i}\frac{\partial}{\partial \phi_i} - \frac{\partial h}{\partial \phi_i}\frac{\partial}{\partial q^i}\right) + \sum_{\alpha=1}^{m}\left(\frac{\partial h}{\partial p_\alpha}\frac{\partial}{\partial \psi^\alpha} - \frac{\partial h}{\partial \psi^\alpha}\frac{\partial}{\partial p_\alpha}\right)$$

を定義し，2つの関数 h, k に対して双1次式

$$\{h, k\} = -\sigma(h)(k) \tag{13}$$

を定義する． このとき、

(i) h が B 系の保存量ならば $\sigma(h)$ は B 系の対称性作用素．

(ii) h, k が B 系の保存量ならば $\{h, k\}$ も B 系の保存量．

一般に 正準構造をもつ離散系は変分原理によって特徴づけられる Lagrange 形式をもつ． そして、Lagrangian を L とするとき $\nu_{\tau+1} - \nu_\tau = dL_\tau$ が成り立つ [4]． しかし、B 系については Th. 2 から $dL_\tau = 0$、従って $L = const.$ が成り立つ． つまり B 系は Lagrange 形式を有さない非常に特殊な Hamilton 系である． このことは 以下に記すような B 系の幾何学的解釈と密接に結びついている．

いま、(q, p) からなる $n+m$ 次元空間を N とする． A 系すなわち (5) は N 上の写像 Φ_1 を与えるものと解釈される． §2 において我々は先ず (10) を導いたが これは (5) の変分方程式である． つまり (5) 及び (10) は (5) の接束 TN 上への自然な Φ_1 の拡張写像を与えている． 次に 我々は双1次式 (11) が保存量になるように ϕ_τ, ψ_τ を導入した． このことは ϕ_τ, ψ_τ のみたす方程式 (12) 及び (5) が、TN の双対束である余接束 T^*N への Φ_1 の拡張写像であることを意味する． つまり

B系が定める写像Φ_2は Φ_1のT^*Nへの自然な拡張写像なのである．

A系とB系との間のこのような関係は 最大原理を構成する論理の中に自然にはいっていた． しかも、T^*Nへの自然な拡張写像であるということは ある条件の下で離散系がLagrange形式をもたないことと同値であることもすぐわかる．

最後に、保存量と対称性作用素とに関連して A,B両系間の関係をみる． 次のような形の保存量をB系の1次保存量と呼ぶ．

$$I=\sum_{i=1}^{n}\phi_i\,\xi^i(q,p)+\sum_{\alpha=1}^{m}\psi^\alpha\,\eta_\alpha(q,p). \tag{14}$$

次の2つの命題は[6]に与えられており証明は省略する．

<u>Th. 3.</u> (14)がB系の1次保存量であるための必要十分条件は、

$$X_I=\sum_{i=1}^{n}\xi^i(q,p)\frac{\partial}{\partial q^i}+\sum_{\alpha=1}^{m}\eta_\alpha(q,p)\frac{\partial}{\partial p_\alpha}$$

がA系の対称性作用素であることである．▟

これによって A系の任意の対称性作用素がB系の1次保存量として把握することができる． 1次保存量の全体は(13)で定まるPoisson括弧に関してLie代数をなし、A系の対称性作用素の全体もLie代数をなす． そして、$I\mapsto -X_I$は2つ

のLie代数の間の同型対応を与えている。すなわち、

<u>Th. 4.</u>　I, J をB系の1次保存量、$\{,\}$を(13)で与えられるPoisson括弧とするとき、$\{I, J\}$もB系の1次保存量である。しかも、$X_{\{I,J\}} = -[X_I, X_J]$ がなりたつ。但し、$[X, Y] = XY - YX$.

同型であることは I 及び X_I の形から容易にわかる。我々は上の2つの定理から任意のA系の対称性群の構造をB系の1次保存量だけから知ることができる。

§4. 終わりに

我々はKatzの離散型最大原理を任意の n, m に対する制御系に適用できるように拡張し、その微分幾何学的側面を考察した。保存量はLyapunovの安定性に関して有用性が示されているけれども、対称性作用素のこの方面での有用性については些か心許ない。§1の c.f. として幾つかの糸口らしいもの（全然関係ないかもしれない）を挙げたが、今後の研究課題の1つであろうと思われる。

第2に、(8)を計算機で解くに際して状態変数の半数は初期条件が、後り半数は終端条件が与えられていて、その条件

の下で各H_τをmin.とする必要がある．このような変則的な両端境界値問題を効率的に解くアルゴリズムは現在どうなのだろうかという疑問が残る．常微分方程式の数値解法でも、両端境界値問題の方が初期値問題よりも解法に工夫を要することがあることからも、先の点は考慮すべきことと思われる．

REFERENCES

[1] S. Katz: A discrete version of Pontryagin's maximum principle, J. Electronics and Control, 13 (1962), 179-184.

[2] L. T. Fan and C. S. Wang: The discrete maximum principle, Wiley, New York, 1964 (高松武一郎ほか訳、離散型最大原理、コロナ社、1972).

[3] S. Maeda: Canonical structure and symmetries for discrete systems, Math. Japon., 25 (1980), 405-420.

[4] S. Maeda: Lagrangian formulation of discrete systems and concept of difference space, Math. Japon., 27 (1982), 336-345.

[5] S. Maeda: On quadratic invariants in a discrete model of mechanical systems, Math. Japon., 23 (1979), 587-605.

[6] S. Maeda: Symmetry aspect of discrete maximum principle, Math. Japon., 26 (1981), 319-326.

[7] H. Halkin: Optimal control for system described by difference equations, Adv. Cont. Systems, 1 (1964), 173-196.

[8] M. Ikeda and K. Sakamoto: On the concept of symmetry in Pontryagin's maximum principle, SIAM J. Cont., 13 (1975), 389-399.